Opponensi vélemény

Ferenczi Miklós:

„Reprezentációelmélet logikai eredetű relativizált halmazalgebrákra alapozva"

című

MTA doktori értekezéséről

Ferenczi Miklós kutatási területe az algebrai logika területére esik, ezen belül disszertációjában a reprezentációelmélet témakörét vizsgálja. A reprezentáció tételek természetesen tekinthetőek a vonatkozó algebra osztályok axiomatizálhatósági eredményeinek is. Problémafelvetései Henkin klasszikus irányát követik, e területen ér el általánosabb, mély eredményeket. Mindezek alapján elmondható, hogy Ferenczi Miklós kutatását a matematika fontos, nemzetközi érdeklődésre számot tartó terültén végzi.

Az alábbiakban áttekintem a disszertáció eredményeit. Ferenczi Miklós az algebraizációra a cilindrikus és poliadikus algebrák osztályait használja fel. Ismert, hogy az elsőrendű logika algebraizációi, például a Tarski-féle *cilindrikus algebrák* általában nem reprezentálhatóak általánosított cilindrikus halmazalgebrákkal, csupán egyes részosztályaik (pl. a lokálisan véges vagy a dimenzió korlátozott részosztály). Azonban ez utóbbiaknak nem létezik „szép" (elsőrendben véges) axiomatizációja.

A relativizált *cilindrikus algebrák* vizsgálatát Henkin kezdeményezte, majd Németi és Andréka teljesítette ki. Az első fontos vonatkozó eredmény Resek tétele, melynek továbbfejlesztése a neves Resek-Thompson-Andréka tétel, ahol többek között a merry-go-round axioma sémát egyetlen sémára redukálták és egyszerű bizonyítást adtak. A jelölt először ennek a tételnek a javítására és elemzésére koncentrál. Megadja a (C4)* axióma három ekvivalens alakját (a (C4)-től megfosztott cilindrikus algebrák axiómáit feltéve), majd ennek segítségével igazolja a RTA tétel egy variánsát.

Mivel az egyenlőségmentes poliadikus algebrák mindig reprezentálhatók, az értekezés egyenlőséges poliadikus algebrákkal foglalkozik. Ferenczi Miklós a poliadikus típuson a transzpozíció-, a kvázi-poliadikus-, az m-kvázi-poliadikus- és a klasszikus poliadikus algebrák típusait érti, és felteszi, hogy azok csak közönséges cilindrifikációkat tartalmaznak. A disszertáció második részében a poliadikus típusú algebrák r-reprezentációinak (azaz relativizált algebrákkal való reprezentációinak) lehetőségét vizsgálja meg. Igazolja, hogy tetszőleges α-dimenziós ($\alpha \geq 3$) transzpozíció algebra reprezentálható általánosított gyenge relativizált transzpozíció halmaz algebrával. Azaz, ha az egység „gyenge tereinek" diszjunktságát nem tesszük fel (mint a klasszikus cilindrikus algebra osztálynál) akkor a kapott osztály axiomatizálható elsőrendben egyenletek egy véges sémájával, és az axiómáknak választhatóak a transzpozíció algebra axiómák. Szép tulajdonsága a tételnek, hogy a reprezentáns osztály szerkezete egyszerű, és geometriailag is szemléletes, valamint, hogy a tétel – szemben a vonatkozó klasszikus esettel – véges α–ra is igaz. A tétel következménye, hogy az erős transzpozíció algebrák is reprezentálhatóak relativizált halmazalgebrákkal.

A következő részben Ferenczi Miklós a klasszikus (Halmos féle) egyenlőséges poliadikus algebrákat vizsgálja a csak „singe” cilidrifikáció megszorítással. Ezen algebráknál a transzformációk lehetnek végtelenek. Kimondja és belátja az egyenlőséges cilindrikus poliadikus algebrák reprezentáció tételét, ezzel általánosítva a végtelen esetre Andréka vonatkozó eredményét. Továbbá belátja az m-kvázi poliadikus, lokálisan m-dimenziós algebrák reprezentáció tételét is, amely Halmos klasszikus, lokálisan véges, kvázi-poliadikus, végtelen dimenziós algebrákra vonatkozó tételének általánosítása.

Ferenczi Miklós disszertációjának harmadik részében az r-reprezentálhatóság fogalmának jellemzését vizsgálja neat beágyazással, cilindrikus típusú algebrák esetén; ez cilindrikus típusú algebrákra az r-reprezentálhatóság tisztán algebrai megfelelőjét adja meg. Belát egy szükséges és egy elégséges feltételt. Továbbá kimond és belát egy neat beágyazási tételt a lokálisan m-dimenziós, egyenlőséges, cilindrikus, m-kvázi-poliadikus algebrákra. Ez utóbbi eredény azért is fontos, mivel - amint az ismert - egyenlőséges, poliadikus algebrákra nem létezik neat beágyazási tétel.

Ferenczi Miklós disszertációja utolsó részében bemutatja, hogy a reprezentáció- és neat beágyazási tételeknek hogyan alkalmazhatóak a Matematikai Logikában. A neat beágyazási tételek ezen alkalmazásai a logika szempontjából elsősorban teljességi tételek bizonyítására használhatóak. Az RTA tétel metamatematikai jelentése, hogy teljességi tételekhez elegendő egyes alapvető logikai tulajdonságoknak csupán gyengített változatait használni. Ferenczi Miklós rámutat, hogy a neat beágyazási tulajdonságok felhasználhatóak egyes levezetési relációk kiterjesztése konzervativitásának belátására is.

A disszertációban felhasznált módszerek:

- a Németi-féle step-by-step technika, például a transzpozíció algebrák r-reprezentálhatóságának igazolására,
- neat beágyazási tételek alkalmazása, például a cilindrikus poliadikus algebrák r-reprezentáció tételének igazolásakor,
- neat beágyazási tételek igazolására a Tarski által az algebrai logikában bevezetett ultrafilter konstrukciós technika és annak továbbfejlesztése, például a cilindrikus r-reprezentálhatóság jellemzésére vonatkozó „neat beágyazási tétel” bizonyításakor,
- az algebráról logikára fordítás technikája, például kihasználva, hogy a végtelen-dimenziós cilindrikus algebráknak, a végtelen argumentumú

relációkat tartalmazó nyelvekre épülő bizonyos konkrét kalkulusok felelnek meg.

Összefoglalva elmondható, hogy Ferenczi Miklós számos érdekes, mély eredénnyel gazdagította az algebrai logika reprezentációelméletét. Ezek közül néhány tétele nagynevű matematikusok tételeinek általánosítása. A doktori mű hiteles adatokat tartalmaz. A jelölt nem dolgoz ki eredeti módszertant, de a szakirodalomban fellelhető módszertanok színe-javát kreatívan alkalmazza az ismert eseteknék általánosabb esetekben is. Például egy fontos módszertant (a neat beágyazások technikáját) a korábbiaknál jóval általánosabb esetekre is kiterjeszti. Az eredmények tekintetében további méltatásként elmondható, hogy Ferenczi Miklós nem csupán fontos tételeket bizonyít, de számos esetben az azokhoz kapcsolódó helyes definíciókat is ő találja meg.

Külön kiemelendő, hogy a tézisfüzet 4-ik, Összefoglalás című feljezete kiváló szabatossággal ad átfogó képet az elvégzett munkáról ideértve az eredmények pontos elhelyezését és azoknak a tudományterületre kifejtett jelentőségét is.

Végül megemlíteném néhány hiányosságot is, nem térve ki az ilyen lélegzetű műveknél szinte elkerülhetetlenül előforduló elgépelési hibákra. A dolgozat kissé nehezen olvasható. Véleményem szerint könnyítené az olvashatóságot, ha a rövid jelölések (pl. TA, CQE) helyett a jelölt inkább a hosszabb „szóbeli" megnevezéseket használná például a tételek kimondásakor. A jelölt a disszertációban a cilindrikus algebrák (C4) és (C6) axiómáira korábban hivatkozik, mint ahogy azok definiálásra kerülnének. A tézisfüzetben a 2.2 definíció után a 3.13. definíció utáni megjegyzésre hivatkozik a szerző, de sem a tézisfüzetben sem a disszertációban nincsen a mondott definíció után (közvetlenül) megjegyzés. Talán szerencsésebb lenne az egyenlőség mentes kifejezést (pl. tézisfüzet 1. oldal) egybeírni. Egyes esetekben a tézisfüzetben olyan részekre hivatkozik a jelölt, amelyek csak a disszertációban lelhetők fel (pl. a Tézisfüzet 14-ik oldalán a 3.4 Definíció).

Azonban a fenti megjegyzések nem befolyásolják a doktori mű tudományos értékét. Véleményem szerint Ferenczi Miklós disszertációja megfelel a doktori diszertációkkal szemben támasztott követelményeknek, Ferenczi Miklós alkalmas a tudományok doktora cím elnyerésére. A disszertáció nyilvános vitára való kitűzését és a matematikai tudományok doktora cím odaítélését javaslom.

Pécs, 2014. június 12.

Jenei Sándor

a matematikai tudományok doktora